SESION 10
5.3. Anualidades
5.4. Amortización

ANUALIDADES VENCIDAS

Al comprar ciertos artículos no siempres se pueden pagar de contado, por lo que es muy común rel uso de créditos, ya sea mediante bancos o directamente con el vendedor.

Cuando se contrae una deudas muy grande, como ocurrirá en la compra de un automovil, una cada o equipo industrial, no es posible liquidarla con un solo pago; por lo que se acuerda una serie de pagos iguales den determinado tiempo; pagos que incluyen una parte de la deuda y el interés que se cobra por el financiamiento. Este tipo de formas de pago en matemáticas financieras son conocidos como anualidades.

Actualmente la situación económica ha convertido el uso de las anualidades en algo cotidiano para la compra de artículos de uso particular, como son las computadoras, televisores, estufas, refrigeradores, por mencionar algunos.

A lo largo de esta unidad se describe a las anualidades, clasificandolas de acuerdo con sus cáractererísticas. Aquí analizaremos de modo particular las anualidades vencidas, que tienen la carácter´sitica de liquidarlas al final del periodo de pago, como el pago de salarios, el cual se realiza al final de la quincena o semana y no al inicio de ésta.

Se describirá cómo calcular el monto, el valor presente y la renta de una anualidad vencida; la forma para determinar la aproximación de la tasa de interés, así como el número de pagos para estas anualidades.

La **anualidad** es el conjunto de pagos iguales, realizados a intervalos iguales, independientemente del tiempo transcurrido entre cada pago.

Aunos ejemplos de anualidades son el pagomensual por la renta de un inmueble, lasprimas anuales que se paganpor las polizas de seguroy los depósitos constates en un fondode ahorro, como las afores.

Con frecuencia se considerael términoanualidad como sinónimo de pagos anualeslo cual no es cierto. En realidad una anualidad puede representarse pagos quincenales, mensuales, semenstrales o de cualquier otra forma periódica.

Cuando se estudian anualidades es importante conocer las definiciones de renta y periodo de pago.

A cada uno de los pagos que se realizan en forma periódica se les llama renta, la cual representaremos con la letra **R**

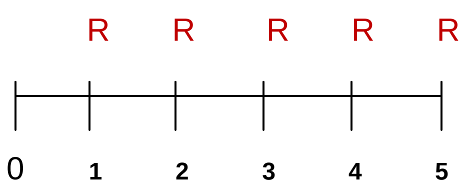
Al tiempo transcurrido entre un pago y otro se le denomina intervalo o periodo de pago.

Monto y valor presente de una anualidad vencida

Como ya se menciono una anualidad es una serie de pagos iguales realizados en tiempos iguales. Veamos en una gráfica de tiempo (recuerda que estamos tratando anualidades vencidas)

Imagina que realizas una serie de cinco pagos periódicos al final de cada semestre, con una R renta, donde al número de pagos lo representaremos con la letra n que en este caso son 5

GRAFICA DE TIEMPO



SEMESTRES

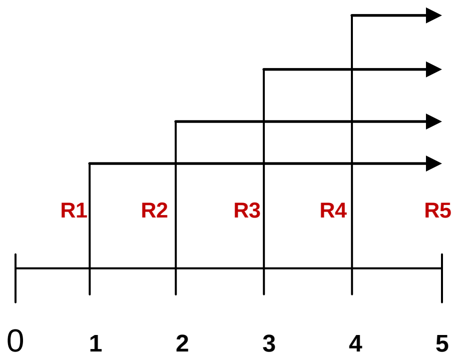
Como puedes observar, matemáticamente una anualidad es una ecuación de valor, donde las rentas representan los pagos.

En una anualidad se puede obtener el valor presente de los pagos y el valor futuro o monto de los mismos. Iniciaremos calculando el monto de una anualidad vencida.

El **monto de una anualidad vencida** se puede definir como el valor acumulado de una serie de rentas, cubiertas al final de cada periodo de pago tomando como fecha de evaluación (fecha focal) el término de la anualidad, es decir, la fecha del último pago.

Veamos esta definición representada en una gráfica de tiempo.

Gráfica de tiempo



Fecha focal o de evaluación

Monto = $\sum \boldsymbol{de\ pagos}$

Todo valor que se quiera conocer a valor futuro es monto, cuando el problema diga cual es el valor futuro o acumulado o ahorrado o generado se tratara de calcular monto y en la líneas de tiempo va de derecha a izquierda es monto.

La formula que nos permite calcular el monto de una anualidad vencida.

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

M= monto i= tasa nominal por periodo de capitalización

R= renta n= número de pagos

Una persona paga un televisor con $ 1000.00 al final de cada semestre durante cinco años, con una tasa de interés del 12% capitalizable semestralmente. ¿Cuál será el precio del televisor si se comprara en el momento del último pago?

Como los pagos se realizan al final de cada semestre, significa que son pagos vencidos, por lo tanto se trata de una anualidad vencida.

Donde:

R= 1000

$i = \frac{0.12}{2} = 0.06 \left(recuerda\ que\ i = \frac{j}{k}, para\ este\ caso\ k = 2, por\ ser\ semestral\right)$

n= 5(2)= 10 pagos, ya que los pagos son semestrales.

Como la pregunta es cuál es el precio del televisor a los cinco años, veamos que lo que se busca es el monto de los pagos (rentas); por lo tanto, al sustituir los datos en la fórmula para el monto de una anualidad vencida tenemos.

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$M = 1000\frac{(1+0.06)^{10} - 1}{0.06}$$

Al realizar las operaciones:

$$M = 1000\frac{(1.06)^{10} - 1}{0.06}$$

$$M = 1000\frac{1.7908 - 1}{0.06}$$

$$M = 1000\frac{0.7908}{0.06}$$

$$M = 1000(13.1808) = 13\,180.79$$

Significa que el precio del televisor al momento del último pago es de $ 13 180.79.

De la misma manera, como es necesario determinar el monto de una anualidad, también es necesario en algunos casos calcular el valor actual de la misma.

La fórmula para calcular el valor actual de una anualidad vencida es:

$$C = R\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Donde:

C= Capital   i= tasa nominal por periodo de capitalización

R= renta   n= número de pagos

Nota: Una forma de identificar que se trata de un ejercicio donde hay que calcular capital y no monto es que dentro de la redacción dirá cual será el valor presente o actual o inicial o de contado.

En la línea de tiempo el dinero se regresará de derecha a izquierda.

Ejemplo

Una compañía vende computadoras mediante pagos mensuales vencidos de $500.00 durante dos años. Si en estos casos se está cargando una tasa de interés del 18% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál es el precio de contado de cada computadora?

R= $500

$$i = \frac{0.18}{12} = 0.015$$

n= 2(12)= 24pagos mensuales durante dos años

Como se desea saber cuál es el precio de contado de cada computadora, y el precio de contado representa el valor actual, significa que se busca el valor presente de los pagos (rentas), por lo tanto, al sustituir los datos en la fórmula para el valor presente de una anualidad vencida se tiene:

$$C = 500\,\frac{1 - \;(1 + 0.015)^{-24}}{0.015}$$

$$C = 500\,\frac{1 - \;(1.015)^{-24}}{0.015}$$

$$C = 500\,\frac{1 - 0.6995}{0.015}$$

$$C = 500\,\frac{0.3005}{0.015}$$

$$C = 500(20.0304) = 10\,015.20$$

El precio de contado de cada computadora es de $10 015.20

Ejemplo

Se ofrecen en venta departamentos de interés social con un anticipo que la inmobiliaria acepta recibir en 15 mensualidades ordinarias de $1 700.00 a partir de la entrega de la vivienda. ¿Cuál es el valor presente del enganche al momento de la compra y qué costo de contado tienen los departamentos, si dicho enganche corresponde al 30% del costo y el tipo de interés es del 34.2% capitalizable mensualmente?

Solución.

n= 15 pagos

R= 1700

i= 34.2% capitalizable mensualmente

$$i = \frac{0.342}{12} = 0.0285$$

Como queremos saber el valor presente del enganche, tenemos:

$$C = R\frac{1 - \ (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$C = 1700\,\frac{1 - \ (1 + 0.0285)^{-15}}{0.0285}$$

$$C = 1700\,\frac{1 - \ (1.0285)^{-15}}{0.0285}$$

$$C = 1700\,\frac{1 - \ 0.6560}{0.0285}$$

$$C = 1700\,\frac{0.3439}{0.0285}$$

$C = 1700(12.0684)$**= 20 516.28**

El valor presente del enganche es de $20 516.28

Como el valor presente del enganche es de $20 516.28 equivale al 30% del costo del departamento, el costo de contado será:

30%----------- 20516.28

100%--------- x

$$x = \frac{100\,(20516.28)}{30} = 68387.6$$

El costo del departamento es de $ $68\,387.6$

Renta

Como se mencionó anteriormente, a cada uno de los pagos que se realizan en forma periódicamente, se les llama **rentas**

Es común que se requiera conocer el valor de la renta de una anualidad cencida, ya que normalmente se conocen los precios de contado, y lo que se busca es establecer de cuánto deben ser los pagos periódicos con los que se pagará la compra.

El valor de la renta de una anualidad se puede despejar de la fórmula para calcular el monto de una anualidad vencida, o de la que permite calcular el valor presente de una anualidad vencida, dependiendo de los dos con los que se cuenten.

Ejemplo

Una compañía planea comprar una máquina dentro de cuatro años, la cual tendrá un costo de $80 000.00. La compañía puede disponer de pequeñas cantidades al corte mensual, sin deposita estas cantidades en una cuenta bancaria que paga el 6% de interés con capitalización mensual. ¿De cuánto se debe disponer en el cierre mensual para el depósito en el banco?

Solución

M= 80 000 **Se trata de un problema de monto ya que es el ahorro al final de cuatro años**

$$i = \frac{0.06}{12} = 0.005$$

n= 4(12)= 48 pagos mensuales durante cuatro años.

El valor que se va a buscar es la letra, y como uno de los datos con los que se cuenta es el monto de la anualidad, la renta se puede despejar de la fórmula para el cálculo del monto:

$$\boldsymbol{M = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$\boldsymbol{R = \frac{M}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}}$$

$$80\,000 = R\,\frac{(1+0.005)^{48}-1}{0.005}$$

$$80\,000 = R\,\frac{(1.005)^{48}-1}{0.005}$$

$$80\,000 = R\,\frac{1.2705-1}{0.005}$$

$$80\,000 = R\,\frac{0.2705}{0.005}$$

$$80\,000 = R(54.0978)$$

$$R = \frac{80\,000}{54.0978} = 1\,478.80$$

Ejemplo

Una persona adquiere un refrigerador cuyo precio es de $7,200.00, y la tienda le da la posibilidad de pagarlo en 12 mensualidades vencidas. ¿De cuanto será cada mensualidad si le cargan el 18% de interés capitalizable mensualmente?

C= $7 200.00 **Se trata de un problema de valor actual, ya que se tiene precio de contado**

$$i = \frac{.18}{12} = 0.015$$

n= 12 pagos mensuales

El valor que se va a buscar es la renta, y debido a que uno de los datos con los que se cuenta es el precio de contado, la renta se puede despejar de la fórmula para el cálculo del valor presente de una anualidad vencida:

$$C = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$7\,200 = R\frac{1 - (1 + 0.015)^{-12}}{0.015}$$

$$7\,200 = R\frac{1 - (1.015)^{-12}}{0.015}$$

$$7\,200 = R\frac{1 - 0.8363}{0.015}$$

$$7\,200 = R\frac{0.16361}{0.015}$$

$$7\,200 = R(10.9075)$$

$$R\frac{7200}{10.9075} = 660.10$$

Cada abono debe ser de $660.10, cada mes.

Aproximación del plazo de anualidades vencidas

Para determinar el número de pagos o plazo de una anualidad vencida, ocurre lo mismo para el cálculo de la renta, se cuenta con dos fórmulas, la del monto y la del valor presente, pudiéndose despejar de ambas el número de pagos y dependerá de los datos con que se cuenten cuál se utilizará.

Ejemplos

Calcula el número de pagos semestrales vencidos de $1000.00 pesos que deberán realizarse para cancelar un adeuda de $5000.00 y una tasa de interés acordada del 6% capitalizable semestralmente.

R= $1 000.0

C= $ 5000.00

$$i = \frac{0.06}{2} = 0.03$$

Se sustituyen los datos en la fórmula para el cálculo del valor presente de una anualidad vencida, ya que uno de ellos es el valor presente:

4

3 **A continuación te enumero los despejes.**

1

$$C = R\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$5000 = 1000\,\frac{1-(1+0.03)^{-n}}{0.03}$$

2

Se realizan las operaciones

$$\frac{5000}{1000} = \frac{1-(1.03)^{-n}}{0.03}$$

$$5 = \frac{1-(1.03)^{-n}}{0.03}$$

$$5(0.03) = 1-(1.03)^{-n}$$

0.15= $1 - (1.03)^{-n}$

0.15 - 1 = $-(1.03)^{-n}$

- 0.85 = $-(1.03)^{-n}$

Se multiplica por (-1) en ambos lados para eliminar el signo negativo

(-1) - 0.85 = $-(1.03)^{-n}$ **(-1)**

0.85 = $(1.03)^{-n}$

Aplicando logaritmos en ambos lados de la longitud y aprovechando sus propiedades:

log 0.85 = log $(1.03)^{-n}$

log 0.85 = - n log 1.03

$$-n = \frac{log\ 0.85}{log\ 1.03} = \frac{-0.0706}{0.012837} = -5.4982$$

$$-n = -5.4982$$

Se multiplica por (-1) en ambos lados para eliminar el signo negativo

$$(-1) - n = -5.4982\ (-1)$$

$$n = 5.4982$$

Se requiere aproximadamente 6 pagos (el número de rentas por lo general se aproxima al número entero inmediato. En este texto se considerará siempre este criterio)

Ejercicio

Una persona desea adquirir una automóvil al contado, para lo cual requiere reunir $120 000.00, depositando $5 000.00 mensuales en un fondo de inversión que paga el 15% de interés convertible mensualmente. ¿Cuántos depósitos necesita efectuar para reunir esa cantidad?

Es importante identificar ya que te mencionan un fondo, por lo tanto se trata de un monto ya que se quiere acumular 120 000 en dicho fondo

R= $ 5000.00

M= $120 000

$$i = \frac{0.15}{12} = 0.0125$$

Se sustituye en la fórmula de monto de una anualidad vencida, ya que uno de ellos es el monto:

A continuación te enumero los despejes.

$$M = \underbrace{R}_{1}\,\frac{\overbrace{(1+i)^{n}}^{4}\underbrace{-1}_{3}}{\underbrace{i}_{2}}$$

Realizando las operaciones:

$$120\ 000 = 5\ 000\,\frac{(1+0.0125)^{n}-1}{0.0125}$$

$$\frac{120\,000}{5000} = \frac{(1 + 0.0125)^n - 1}{0.0125}$$

$$24 = \frac{(1+0.0125)^n - 1}{0.0125}$$

$$24\,(0.0125) = (1.0125)^n - 1$$

$$0.3 = (1.0125)^n - 1$$

$$0.3 + 1 = (1.0125)^n$$

$$1.3 = (1.0125)^n$$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad

$$log\ 1.3 = log\ (1.0125)^n$$

$$log\ 1.3 = n\ log\ 1.0125$$

Despejamos a n

$$n = \frac{\log 1.3}{\log 1.0125} = \frac{0.113943}{0.005395} = 21.12$$

Se requieren aproximadamente 22 pagos

AMORTIZACION Y FONDO DE AMORTIZACIÓN

En ocasiones se contraen deudas tan grandes que no se puede liquidar con un solo pago, por lo que se hace necesario pagarlas paulatinamente. A este proceso, en matemáticas financieras se le conoce como amortización.

A lo largo de esta unidad se revisará uno de los principales métodos de amortización, en el cual los pagos son iguales, se calcularán la renta, la tasa de interés y el plazo necesario para cubrir una deuda por medio de amortizaciones.

Por otro lado existen cuentas que se utilizan cono fondos de ahorro, tal es el o tasa de interés y el plazo necesario para una cantidad especifica.

Importe de los pagos de una amortización

La amortización es un proceso con el cual se cancela una deuda de forma gradual mediante pagos iguales.

Existen diferentes tipos de amortizaciones, dos de ellas son la amortización gradual y la amortización constante.

Amortización constante. En este caso los pagos son decrecientes, mientras que el abono al capital es constante y e interés sobre saldos insolutos disminuye en cada pago.

En este capítulo se hace únicamente a las amortizaciones graduales, donde los pagos son constantes y el abono al capital es creciente, ya que es la más generalizada y con más aplicación en las matemáticas financieras.

Con la amortización es un sistema de pagos periódicos y las amortizaciones que se analizarán son las graduales con pagos contantes, podríamos decir que son una aplicación de las anualidades.

Al igual que para las anualidades anticipadas y las anualidades diferidas se utilizaron como las fórmulas de anualidades vencidas.

Uno de los principales valores a determinar en una amortización es el valor de cada uno de los pagos a realizar para cubrir una deuda; éste se puede determinar despejándolo de la fórmula para calcular el valor actual de una anualidad vencida:

$$C = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Se utiliza la fórmula de valor presente, ya que una deuda representa un valor presente.

Ejemplo

El Sr. Ramírez tiene una deuda de $700 000.00 que debe amortizar en 6 años con pagos bimestrales iguales, con un interés del 12.6% anual capitalizable bimestralmente. ¿Cuál es el monto de cada uno de los pagos

C = $700 000

n = 6 años = 6 (6) = 36 años bimestrales.

$$i = \frac{0.126}{6} = 0.021$$

Se sustituyen los datos en la fórmula para el valor actual y se despeja R.

$$C = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$700\,000 = R\frac{1 - (1 + 0.021)^{-36}}{0.021}$$

$$700\,000 = R\frac{1 - (1.021)^{-36}}{0.021}$$

$$700\,000 = R\frac{1 - 0.4733}{0.021}$$

$$700\,000 = R\frac{0.5267}{0.021}$$

$$700\,000 = R(25.0842)$$

$$R = \frac{700\,000}{25.0842} = 27\,905.98$$

Número de pagos de una amortización

Hay ocasiones en las que una persona que contrae una deuda no puede disponer más que de una cantidad determinada para los pagos, entonces lo que requiere cono en cuántos pagos tendrá que realizar para saldar la deuda.

Para determinar el número de pagos iguales que se requiere para amortizar una deuda, se utiliza el mismo método que en las anualidades vencidas, despejando n de la fórmula para el cálculo de un valor presente.

$$C = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Ejemplo

¿Cuántos pagos bimestrales de $17 600.00 se tendría que realizar para amortizar una deuda de $152 000.00 si se aplica una tasa de interés del 9.8% anual compuesto semestralmente?

C = $152 000

R = $17 600

$$i = \frac{0.098}{2} = 0.049$$

Se sustituye los datos en la fórmula para el valor actual y se despeja n:

$$C = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$152\,000 = 17\,600\,\frac{1-(1+0.049)^{-n}}{0.049}$$

$$\frac{152\,000}{17\,600} = \frac{1-(1.049)^{-n}}{0.049}$$

$$8.6364 = \frac{1-(1.049)^{-n}}{0.049}$$

$$8.6364\,(0.049) = 1-(1.049)^{-n}$$

$$0.4232 = 1-(1.049)^{-n}$$

$$(1.049)^{-n} = 1-0.4232$$

$$(1.049)^{-n} = 0.5768$$

Se aplican los logaritmos en ambos lados de la igualdad y utilizando sus propiedades se tiene:

$$log\,(0.5768) = log(1.049)^{-n}$$

$$-n \log 1.049 = \log 0.5768$$

$$-n = \frac{log\,0.57682}{log\,1.049}$$

$$-n = -11.50$$

Multiplicando por (-1)

$$n = 11.50$$